PART2 素因数分解と約数

要点 ① 素数と素因数分解

「素数」… 1 とその数自身以外に正の約数をもたない 2 以上の自然数

例 素数は小さい方から

「合成数」… 2 以上の自然数のうち，素数でない数

例 合成数は小さい方から

※ 1 は素数でも合成数でもない。

「因数」… ある整数がいくつかの整数の積で表されるとき，積を作る 1 つ 1 つの整数

「素因数」… 素数である因数

「素因数分解」… ある自然数を素数だけの積の形で表すこと

例 12 を素因数分解する

12 を素数で次々に割っていくことにより

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

合成数は必ず素因数分解できる。またその結果は，積の順序を考えなければ

である。

例 $12n$ が平方数となる最小の自然数 n を求めたい。

平方数は，ある整数の 2 乗で表される数であり

$$100 = 10^2 = (2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 5^2$$

のように，すべての素因数の個数が偶数個となる。

よって，$12n = 2^2 \cdot 3n$ が平方数となる最小の自然数 n は $n = 3$

（このとき $12n = 12 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2$）

要点② 約数と素因数分解

$12=1\cdot12=2\cdot6=3\cdot4$ より，12 の正の約数は　　　　　　　　の　個である。

この正の約数の個数を，素因数分解を用いて求めることができる。

$12=2^2\cdot3$ より，12 の正の約数は

素因数 2 を最大　個　最小　個

素因数 3 を最大　個　最小　個

もつ数である。例えば

約数 6 は $2\ \cdot3$　と表され，素因数 2 を　個，素因数 3 を　個もつ数

約数 3 は $2\ \cdot3$　と表され，素因数 2 を　個，素因数 3 を　個もつ数

である(自然数 a に対して，$a^0=$　とする)。

つまり，12 の正の約数は

素因数 2 を 0 個～ 2 個，素因数 3 を 0 個～ 1 個

掛けることで得られ，その個数は　×　＝6 (個)である。

このことより，次のことがいえる。

正の約数の個数

自然数 N が $N=p^aq^br^c\cdots\cdots$ と素因数分解されるとき，N の正の約数の個数は

$(a+1)(b+1)(c+1)\cdots\cdots$

2 (1) $\sqrt{1400n}$ が自然数となるような最小の自然数 n を求めよ。

(2) 150 の正の約数の個数を求めよ。

Point Pickup

ある自然数 N が平方数

ある自然数 N が平方数(ある整数の 2 乗で表される数)になるのは，N のすべての素因数の個数が偶数個のときである。

自然数 N の約数の個数

ある自然数 N が $N=p^a q^b r^c\cdots\cdots$ と素因数分解されるとき，N の正の約数の個数は

$$(a+1)(b+1)(c+1)\cdots\cdots$$

第10講 PART2 確認問題

1 $\sqrt{60n}$ が自然数であるとき，最小の自然数 n は，

$n=$ [アイ] である。

2 84 の正の約数は，全部で [ウエ] 個ある。

PART2 素因数分解と約数

2 (1) $\sqrt{1400n}$ が自然数となるような最小の自然数 n を求めよ。

(2) 150 の正の約数の個数を求めよ。

[解答]

(1) $\sqrt{1400n}$ が自然数となるのは，$1400n$ が平方数のときである。

$1400=2^3\cdot5^2\cdot7$ より，求める最小の自然数 n は $n=2\cdot7=14$

(2) $150=2\cdot3\cdot5^2$

よって，150 の正の約数の個数は $(1+1)(1+1)(2+1)=2\cdot2\cdot3=12$（個）

第10講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] アイ：15

[解説]

$\sqrt{60n}$ が自然数となるのは，$60n$ が平方数のときである。[A]

60 を素因数分解すると，

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

よって，求める最小の自然数は，

$$n = 3 \cdot 5 = \mathbf{15}$$ [B]

[A]　自然数 N が平方数（ある整数の 2 乗で表される数）になるのは，N のすべての素因数の個数が偶数個のときである。

[B]　$2^2 \cdot 3 \cdot 5$ に $3 \cdot 5$ を掛ければ，$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^2$ となる。

2

[正解] ウエ：12

[解説]

84 を素因数分解すると，

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

よって，84 の正の約数の個数は，[C]

$$(2+1)(1+1)(1+1) = \mathbf{12}$$ **(個)**

[C]　ある自然数が $N = p^a q^b r^c \cdots\cdots$ と素因数分解されるとき，N の正の約数の個数は，
$(a+1)(b+1)(c+1)\cdots\cdots$